

TD signaux aléatoires : moyenne, autocorrélation, stationnarité

- 1) La fonction d'autocorrélation d'un signal aléatoire $X(t)$ s'écrit $R_X(t_1, t_2)$. Nous formons le signal $Y(t) = X(t+a) - X(t)$ où a est une constante. Calculer la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$. Que devient cette fonction si $X(t)$ est stationnaire au sens large ?
- 2) Trouver les conditions sur A et B pour que le signal aléatoire $X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ soit stationnaire au sens large. A et B sont deux variables aléatoires et ω_0 est une constante.
- 3) On considère le signal aléatoire $X(t) = a \cos(\omega_0 t + \Phi)$ où a et ω_0 sont des constantes et Φ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$. Calculer la moyenne et la fonction d'autocorrélation de $X(t)$, en déduire la puissance de $X(t)$ et vérifier que le signal est stationnaire au sens large.
- 4) On considère le signal aléatoire $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Phi) + B$ où ω_0 est une constante et A , B et Φ sont trois variables aléatoires indépendantes. On suppose que Φ est uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$, et on note $E[A] = \mu_A$, $E[A^2] = P_A$, $E[B] = \mu_B$ et $E[B^2] = P_B$. Calculer la moyenne et la fonction d'autocorrélation de $X(t)$. Le signal est-il stationnaire au sens large ?
- 5) Soit $X(t)$ un signal aléatoire stationnaire au sens large. On définit

$$Y(t) = X(t) \cos(\omega_0 t + \Phi)$$

$$Z(t) = X(t) \sin(\omega_0 t + \Phi)$$

Où Φ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$ et indépendante de $X(t)$. Montrer que $Y(t)$ et $Z(t)$ sont stationnaires au sens large, et que $Y(t) + Z(t)$ n'est par contre pas stationnaire.

- 6) Le signal aléatoire $X(t)$ est *cyclo-stationnaire* au sens large si sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation satisfont les conditions suivantes :

$$\mu_X(t+kT) = \mu_X(t) \quad R_X(t_1+kT, t_2+kT) = R_X(t_1, t_2) \quad \forall k \text{ entier}$$

Montrer que le signal aléatoire $X(t) = Z(t) \cos(\omega_0 t)$ est cyclo-stationnaire au sens large si $Z(t)$ est un signal aléatoire stationnaire au sens large.