

Transformée en Z et fonctions de transfert des systèmes LIT discrets

Exercice 1 : Calculer la transformée en Z de chacun des signaux suivants, calculer ses pôles et ses zéros, déterminer le domaine de convergence et vérifier si la transformée de Fourier du signal existe.

(a) $\delta[n-5]$

(b) $(-1)^n u[n]$

(c) $(-1/3)^n u[-n-2]$

Exercice 2 : On considère la transformée en Z suivante : $X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$. Calculer $x[n]$ sachant que sa transformée de Fourier existe.

Exercice 3 : Un système LIT causal est décrit par l'équation aux différences suivante $y[n]=y[n-1]+y[n-2]+x[n-1]$.

(a) Trouver la fonction de transfert du système, calculer ses pôles et ses zéros et déterminer le domaine de convergence.

(b) Trouver la réponse impulsionnelle du système.

(c) Le système est-il stable ? Pourquoi ?

(d) Trouver la réponse impulsionnelle d'un système stable (non-causal) qui vérifie l'équation aux différences.

Eléments de corrigé

Ex.1

(a) $X(z)=z^{-5}$, 5 pôles en $z=0$, domaine de convergence : $\forall z$ sauf $z=0 \rightarrow$ il contient le cercle unité $\rightarrow$ la TFSD existe.

(b) table $\rightarrow X(z) = \frac{1}{1-(-1)z^{-1}} = \frac{1}{1+z^{-1}}$ si $|z|>1$. $X(z) = \frac{z}{z+1} \rightarrow$ un zéro en $z=0$, un pôle en $z=-1$. Domaine de convergence $|z|>1 \rightarrow$ la TFSD n'existe pas.

(c) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} \left(\frac{-1}{3}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-1}{3} z^{-1}\right)^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-3z)^n = \frac{9z^2}{1+3z}$ si $|-3z|<1$

Un pôle en $z=-1/3$, deux zéros en $z=0$, dom. de conv. : $|z|<1/3 \rightarrow$ la TFSD n'existe pas.

Ex.2

$$1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2} = 0 \rightarrow z^{-1} = \begin{cases} 2 \\ 1/2 \end{cases} \rightarrow X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

Un pôle en $z=1/2 \rightarrow$ A priori, il y a deux possibilités pour le domaine de convergence : $|z|<1/2$ ou $|z|>1/2$.

La TFSD existe $\rightarrow$ le domaine de convergence inclut le cercle unité $\rightarrow$ il est défini par $|z| > 1/2$.

Table $\rightarrow x[n] = (1/2)^n u[n]$.

Ex.3

(a) TZ $\rightarrow Y(z)[1 - z^{-1} - z^{-2}] = X(z)z^{-1} \rightarrow H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z}{z^2 - z - 1}$

Un zéro en $z=0$, deux pôles en $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

système causal $\rightarrow$ domaine de convergence à l'extérieur d'un cercle et contenant l'infini $\rightarrow$ il est défini par $|z| > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(b)
$$H(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} z^{-1}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} z^{-1}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} z^{-1}}$$

$$\rightarrow h[n] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n u[n]$$

(c) Le domaine de convergence ne contient pas le cercle unité $\rightarrow$ le système n'est pas stable.

(d) Pour obtenir un système stable, il faut que le domaine de convergence contienne le cercle unité.  tant donné que le domaine de convergence exclut les pôles du système, le seul choix

possible est : $\left|\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right| < |z| < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. $\rightarrow$

$$h[n] = \frac{-1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n u[-n - 1] - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n u[n]$$