Expérience aléatoire, Concept de probabilité

1) On tire une carte au hasard d'un paquet de 52 cartes à jouer. Evaluer la probabilité de tirer (a) un trèfle ou un 4, (b) ni trèfle ni 4.

2) Démontrer le théorème de Bayes : $P(A|B)=P(B|A)P(A)/P(B)$.

3) Une population comporte autant d'hommes que de femmes. Dans cette population, 12% des personnes sont diabétiques, dont le quart sont des femmes. Un homme est choisi au hasard dans la population, quelle est la probabilité qu'il soit diabétique.

Variables aléatoires, Espérance mathématique

4) La tableau suivant représente la fonction de distribution d'une variable aléatoire discrète X. Déterminer (a) sa fonction de probabilité et (b) $P(1\leq X \leq 3)$, (c) $P(X \geq 2)$, (d) $P(X < 3)$, (e) $P(X > 1,4)$.

x	1	2	3	4
F(x)	1/8	3/8	3/4	1

5) Une variable aléatoire X prend les valeurs 1, 2, …, n avec les probabilités $P(X=k)= \lambda k$. Calculer λ.

6) X est une variable aléatoire (discrète ou continue). Démontrer que $Var(X)=E[X^2]-E[X]^2$.

7) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, chacune pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3 ou 4 avec la même probabilité ¼. On note Y la plus grande des deux variables. (a) Quelle est la fonction de probabilité de Y ? (b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y.

8) La durée de vie d'une ampoule électrique, mesurée en heures, est une variable aléatoire positive X, dont la fonction densité de probabilité est $f(x)=\lambda\exp(-\lambda x)$, pour $x>0$ (avec λ réel positif). (a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité, et calculer sa fonction de distribution. (b) Calculer λ sachant que la durée de vie moyenne d'une ampoule est de 2000 heures. (c) Calculer la probabilité pour qu'une lampe dure plus de 2000 heures.

9) Dans une population de bactéries, la durée de vie maximale d'une bactérie est 4 heures, et la probabilité qu'elle vive au plus x heures est x/4. Quels sont la moyenne et l'écart type de la durée de vie d'une bactérie dans cette population ?

Statistique

10) On a noté l'âge (arrondi à l'année près) des 26 salariés d'une entreprise. Le résultat est donné dans le tableau statistique ci-dessous. (a) Compléter le tableau statistique en calculant les fréquences relatives, les effectifs cumulés et les fréquences cumulées. (b) Tracer le diagramme en bâton et le diagramme cumulatif. (c) Calculer la moyenne, la médiane, l'étendue, la variance et l'écart type des données.

x_i	24	26	27	28	29	31	34
n_i	2	3	7	8	4	1	1

11) Le tableau ci-dessous donne, pour l'année 1987, la répartition des exploitations agricoles françaises selon la SAU (surface agricole utilisée) exprimée en hectares (Tableaux Economiques de Midi-Pyrénées, INSEE, 1989, p. 77) ; la SAU est ici une variable quantitative continue comportant 6 classes. (a) Tracer l'histogramme et la courbe cumulative. (b) Calculer la moyenne, la variance et l'écart type des données.

SAU (en ha)	moins de 5	de 5 à 10	de 10 à 20	de 20 à 35	de 35 à 50	de 50 à 150
fréquences	0,240	0,109	0,178	0,203	0,102	0,168

12) Soit X une variable aléatoire de moyenne μ_x et de variance σ_x^2 sur toute une population. Soit un échantillon de cette population de taille n sur lequel la moyenne et la variance empiriques calculées sont $\overline{X}$ et S^2. Démontrer que $E[\overline{X}]= \mu_x$ et $E[(\overline{X}-\mu_x)^2]= \sigma_x^2/n$.